

【1】 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

【2】 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin \theta > \frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

【3】 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $\cos\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

【4】 $0 \leq \theta < \pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

(2) $2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) > 1$

正弦・余弦の加法定理

Ⅰ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

Ⅱ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

図 1

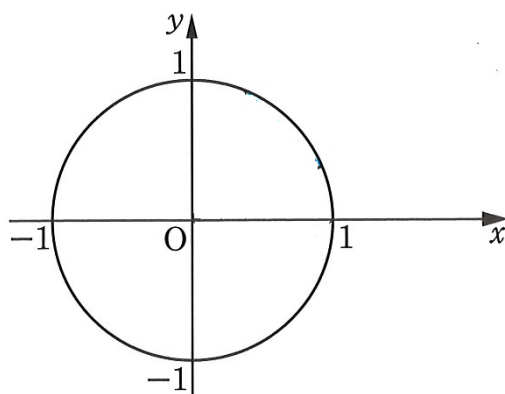
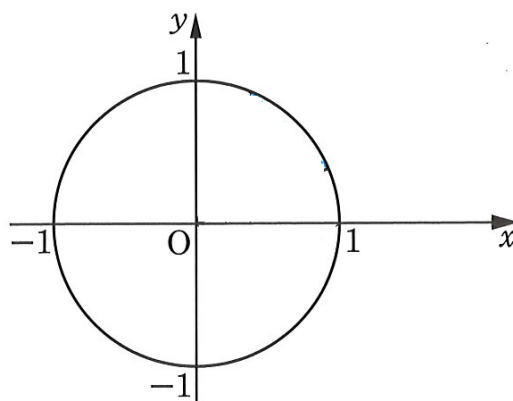


図 2



Ⅱの第2式の証明

単位円において、角 α 、角 β の動径をそれぞれ OA 、 OB とすると、点 A の座標は $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、点 B の座標は $(\cos \beta, \sin \beta)$ である。

図 1

よって2点 A 、 B の距離の2乗は

$AB^2 =$

一方、 $\triangle OAB$ を原点まわりに $-\beta$ だけ回転して、
点 B が点 $E(1,0)$ に重なるようにしたときの点 A の位置を C とする。



このとき $C(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$

よって 2 点 C, E の距離の 2 乗は

$$CE^2 =$$

$$\triangle OAB \equiv \triangle OCE \text{ より } AB^2 = CE^2 \text{ であるから}$$

(証明終)

II の第 1 式の証明

I の第 2 式の証明

I の第 1 式の証明

正接の加法定理

$$\boxed{\text{Ⅲ}} \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Ⅲの第 1 式の証明

Ⅲの第 2 式の証明

【1】 加法定理を用いて，次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$

(2) $\cos 105^\circ$

(3) $\tan 195^\circ$

【2】 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

ただし， α は第1象限の角， β は第3象限の角とする。

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

(2) $\cos(\alpha - \beta)$

【3】 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\beta = -1$ のとき, $\tan(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

ただし, α は第1象限の角とする。

2 直線のなす角

一般に、互いに垂直でない 2 直線 $y = m_1x + n_1$ と $y = m_2x + n_2$ のなす角を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

が成り立つ。

ふつう、2 直線のなす角としては、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲にあるものをとる。

この計算で $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ となる場合は、 $\pi - \theta$ を 2 直線のなす角と考える。

【4】2 直線 $3x - y = 0 \cdots \textcircled{1}$ 、 $2x + y - 4 = 0 \cdots \textcircled{2}$ について

(1) 2 直線のなす角 θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 直線 $\textcircled{1}$ を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転した直線の方程式を求めよ。

加法定理の応用 ⑧ P137-139

加法定理の式から、次の公式が得られる。

2 倍角の公式

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{I}} & \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \boxed{\text{II}} & \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ & = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ & = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \boxed{\text{III}} & \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}$$

3 倍角の公式

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{I}} & \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \\ \boxed{\text{II}} & \cos 3\alpha = -3\cos \alpha + 4\sin^3 \alpha \\ \boxed{\text{III}} & \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{array}$$

半角の公式

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{I}} & \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \boxed{\text{II}} & \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \boxed{\text{III}} & \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{array}$$

【5】 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ とする。 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\cos 4\alpha$

(3) $\sin \frac{\alpha}{2}$

(4) $\tan \frac{\alpha}{2}$

(5) $\tan \frac{3}{2}\alpha$

【6】 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta + 3\sin\theta + 1 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

(2) $\sin 3\theta - \sin\theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

(3) $\cos 2\theta > \cos\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

三角関数の合成 ⑧ P140-142

加法定理を利用して、 $a \sin \theta + b \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形することができる。

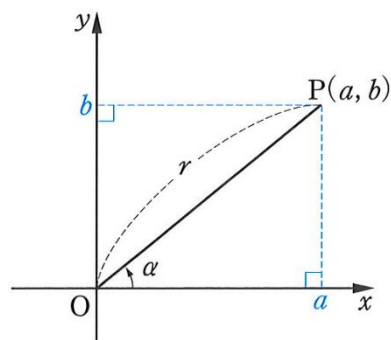
座標が (a, b) である点 P をとり、線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とし、 $\sqrt{a^2 + b^2} = r$ とすると

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

であるから

$$\begin{aligned} a \sin \theta + b \cos \theta &= r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \\ &= r (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ &= r \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

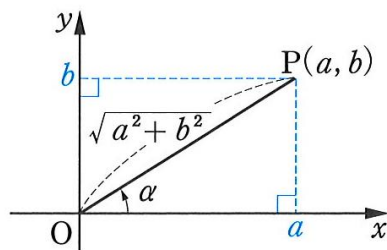
このような変形を、三角関数の合成という。



$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



【7】 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$, $r > 0$ の形に変形せよ。

(1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

【8】

(1) 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形で表せ。ただし、 $r>0$, $-\pi<\alpha\leq\pi$ とする。

(i) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

(ii) $-\sin\theta + 2\cos\theta$

(2) 関数 $y=\sin\theta-\cos\theta$ のグラフをかけ。