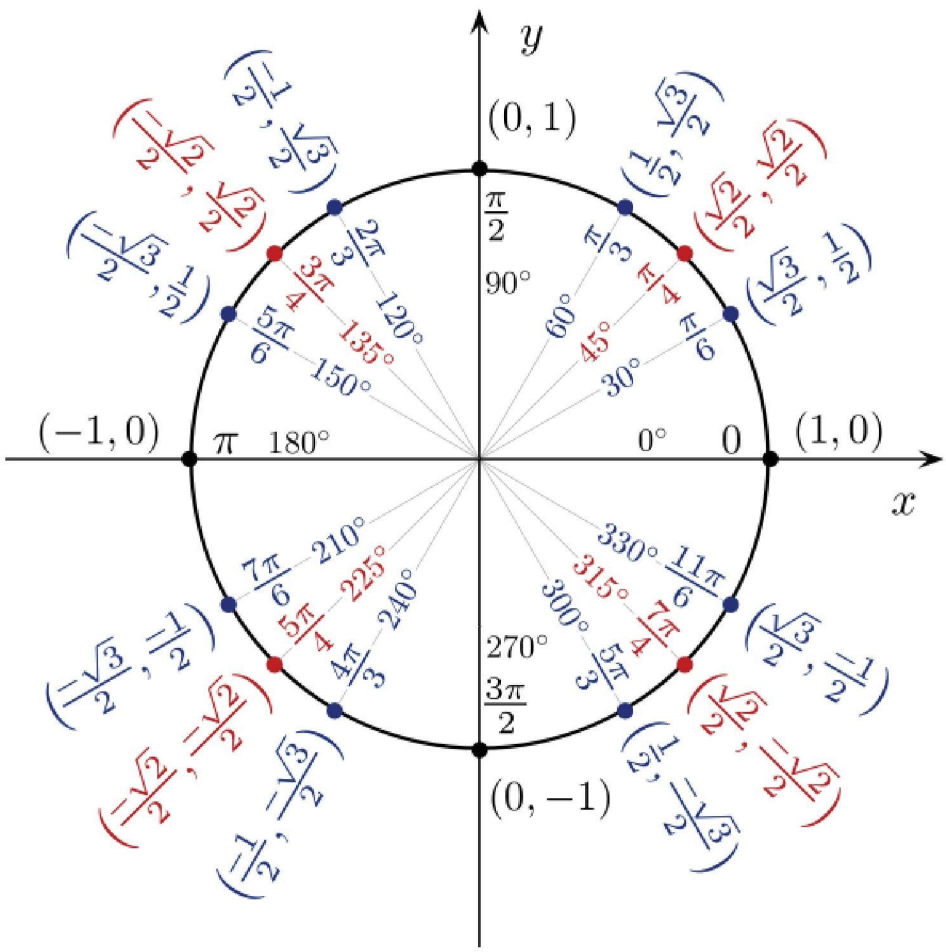
Komabakai Education Centre

KOMABA

高校 2 年生

数学

三角関数



名前

一般角 ㊈P110-112

弧度法

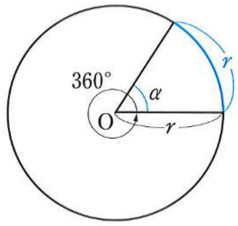
角の大きさを表すのに，これまでは直角の $\dfrac{1}{90}$ を単位とする“度”を用いてきた。

これに対して，1 つの円において，<u>半径と同じ長さの弧に対する中心角</u>を取り，これを単位とする角の表し方がある。

1 つの円において，弧の長さは中心角に比例するので

$$r : 2\pi r = \alpha : 360°$$

よって　$\alpha = \dfrac{180°}{\pi}$



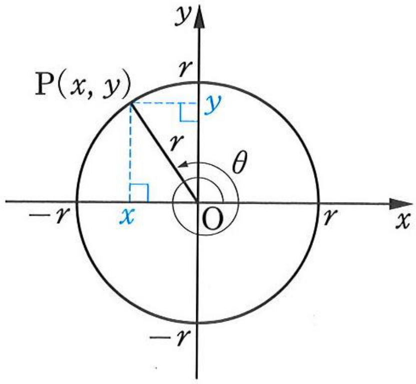
この α は円の半径に関係しない一定の角である。
この角を**1ラジアン**または 1 **弧度**といい，これを単位とする角の表し方を**弧度法**という。

$$1\text{ラジアン} = \frac{180°}{\pi}, \qquad 180° = \pi\ \text{ラジアン}$$

度と弧度の対応

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度																	

三角関数 (教)P113-115

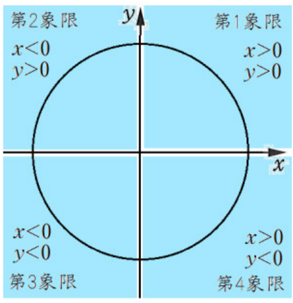


座標平面上で，原点 O を中心とする半径 r の円をかく。x 軸の正の部分を始線として，角 θ の動径と円 O との交点 P の座標を(x, y)とすると，比 $\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ の値は円 O の半径 r の大きさに関係なく角 θ だけによって定まる。

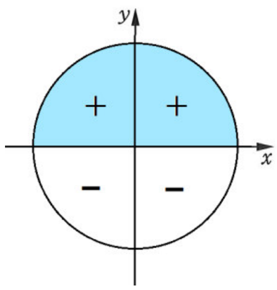
したがって，これらを次のように表す。

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

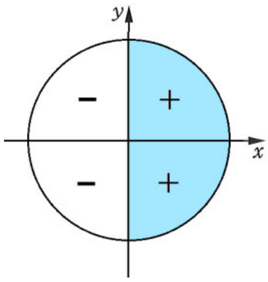
$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値の正負は，θがどの象限の角であるかによって定まる。



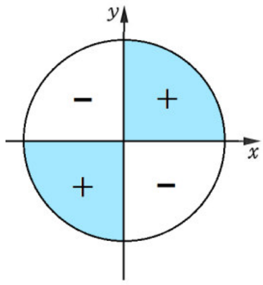
$\sin\theta$の正負



$\cos\theta$の正負



$\tan\theta$の正負



三角関数と単位円

原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**という。

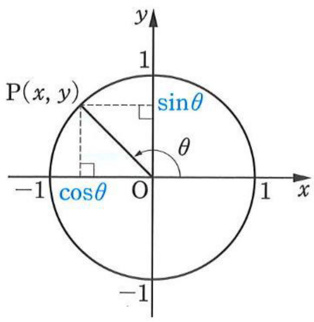
右図のように，単位円と角 θ の動径との交点を$P(x, y)$とすると，

三角関数の定義で$r=1$として

$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y$$

が成り立つ。すなわち Pの座標は

$$P(\cos\theta, \sin\theta)$$



点 Pは単位円の周上にあるから，$\sin\theta, \cos\theta$ の取り得る値の範囲は次のようになる。

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

三角関数の性質　(教)P116-119

右の図で，角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると

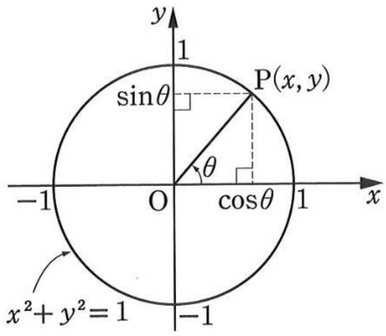
$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$

ここで，$x^2+y^2=1$ であるから

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

また $\tan\theta$ の定義により

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



よって，次の公式が成り立つ。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

【1】

(1)　θ の角度を弧度法で表しなさい。

①$90°$　②$45°$　③$12°$　④$-80°$

(2)　θ が次の値のとき，$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

①$\frac{1}{3}\pi$　②$\frac{7}{6}\pi$　③$-\pi$　④$-\frac{5}{3}\pi$

【2】

(1)　θ が第 1 象限の角で，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\theta, \sin\theta, \tan\theta,$ の値を求めよ。

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\pi < \theta < 2\pi$ で，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，θ は第何象限かを求め，また $\sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

(4)　$\pi < \theta < 2\pi$ で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

【3】 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ とする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3) $\sin\theta-\cos\theta$

(4) $\tan\theta$

【4】 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の値を求めよ。ただし，$\pi<\theta<2\pi$ とする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3) $\sin\theta+\cos\theta$

(4) $\tan\theta$

三角関数の性質

$\boxed{\theta+2n\pi\text{の三角関数}}$

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$$
$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$$
$$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$$

$\boxed{-\theta\text{の三角関数}}$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

$\boxed{\theta+\frac{\pi}{2}\text{の三角関数}}$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan}\theta$$

$\boxed{\theta+\pi\text{の三角関数}}$

$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$
$$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$$
$$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

【5】次の三角関数を鋭角の三角関数で表し，その値を求めよ。

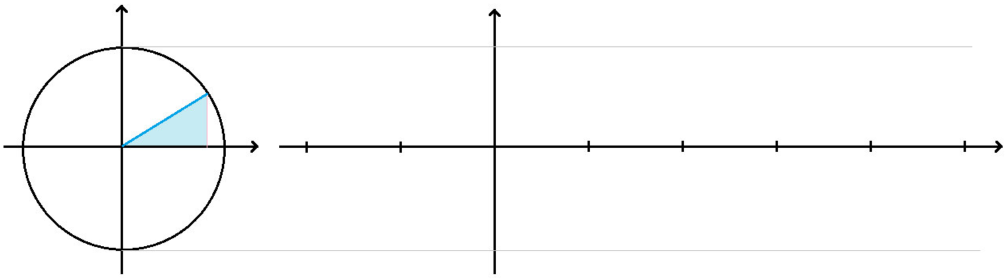
(1) $\sin\frac{13}{6}\pi$　　(2) $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\frac{16}{3}\pi\right)$

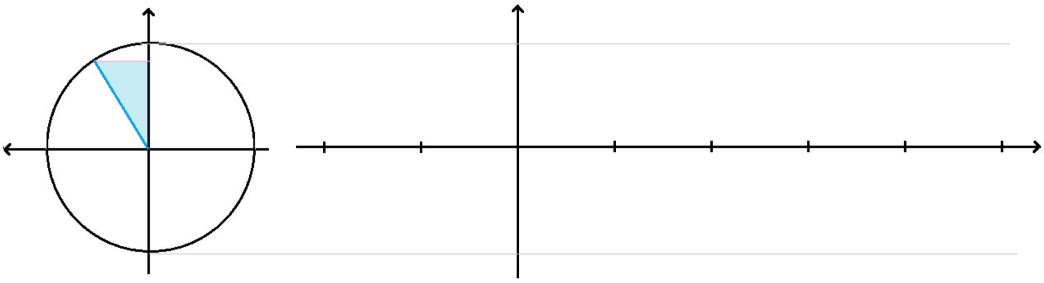
【6】$\sin\frac{\pi}{18}=a$とおくとき，次の値をaで表せ。

(1) $\sin\frac{17}{18}\pi$　　(2) $\sin\frac{5}{9}\pi$　　(3) $\tan\left(-\frac{19}{18}\pi\right)$

三角関数のグラフ　㊡P120-125

角 θ の動径と単位円の交点を P とすると，P の y 座標が $\sin\theta$，x 座標が $\cos\theta$ となる。



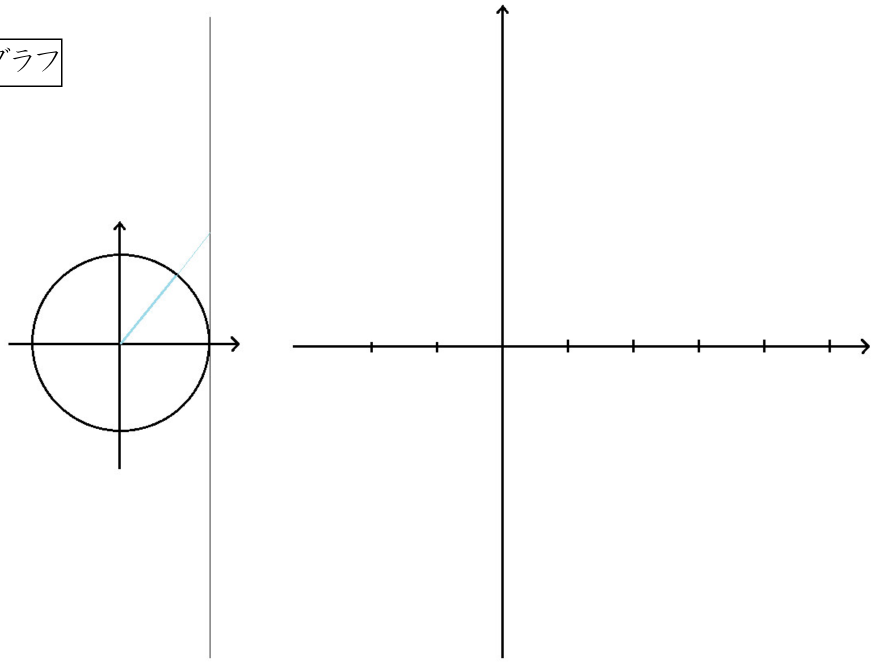


$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$ より

$y=\cos\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。

$y=\cos\theta$ や $y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**という。

$y=\tan\theta$ のグラフ



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，θ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして、θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に近づけば、$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり、グラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このような直線を，グラフの**漸近線**という。

周期関数

関数 $y=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ のグラフは，ともに 2π ごとに同じ形が繰り返される。このことは，次の公式からも分かる。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta, \qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

また $y=\tan\theta$ のグラフは，π ごとに同じ形が繰り返される。このことは，公式 $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ からも分かる。

一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

$$f(x+p)=f(x)$$

がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする**周期関数**という。

三角関数は周期関数であり、$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期は 2π，$\tan\theta$ の周期は π である。

偶関数と奇関数

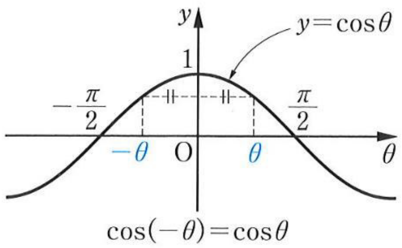
一般に，関数 $f(x)$ において

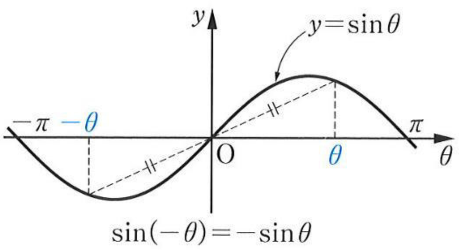
$f(-x)=f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を**偶関数**

$f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を**奇関数** という。

偶関数のグラフは y 軸に対して対称であり，奇関数のグラフは原点に関して対称である。

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ なので，$y=\cos\theta$ は偶関数，$y=\sin\theta$ は奇関数である。





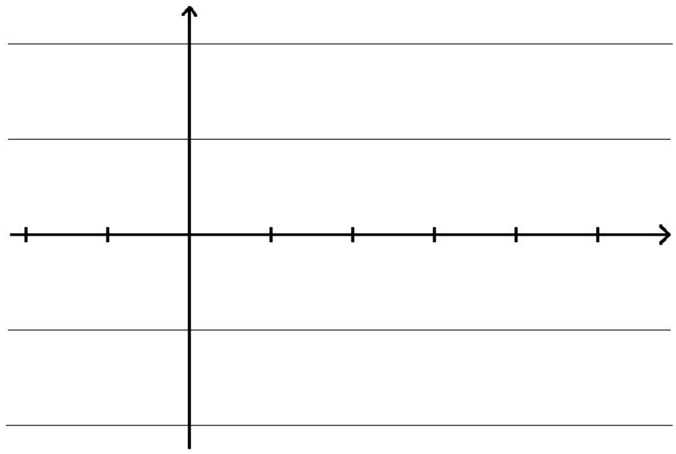
グラフの平行移動

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを x **軸方向に** p，y **軸方向に** q **だけ平行移動**した関数のグラフは，x を $x-p$，y を $y-q$ で置き換えた関数のグラフになる。よって

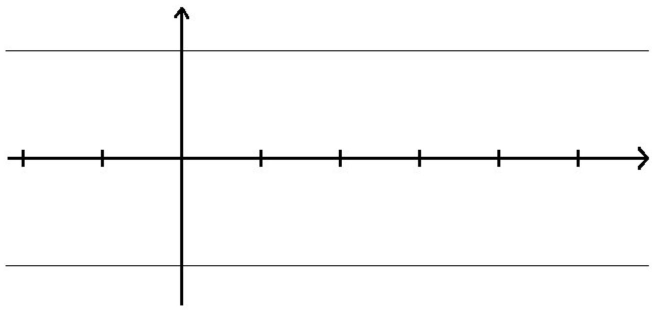
$$y-q=f(x-p) \qquad \text{すなわち} \qquad y=f(x-p)+q$$

いろいろな三角関数のグラフ

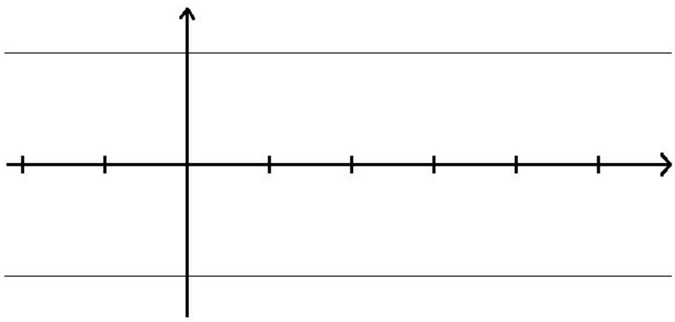
Ⅰ $y=2\sin\theta$ のグラフをかけ。またその時の周期を求めよ。



Ⅱ $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ。またその時の周期を求めよ。



Ⅲ $y=\sin 2\theta$ のグラフをかけ。またその時の周期を求めよ。



θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0					
$\sin 2\theta$	0					

一般に，a を正の整数として，$f(\theta)=\sin a\theta$ とおくと

$$f\left(\theta+\frac{2\pi}{a}\right)=\sin a\left(\theta+\frac{2\pi}{a}\right)\quad=\sin(a\theta+2\pi)\quad=\sin a\theta\quad=f(\theta)$$

が成り立つので，$\sin a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$ である。

同様に，$\cos a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$，$\tan a\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{a}$ である。

【5】次の関数の周期を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-2\cos 3\theta$

(2)　$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

三角関数の応用　㊔P126-130

【6】$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$2\cos\theta = -\sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{2}\sin\theta + 1 \leqq 0$

(3)　$\tan\theta + \sqrt{3} \geqq 0$

【7】$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の方程式を解け。

(1)　$2\cos^2\theta - 7\sin\theta - 5 = 0$

(2)　$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

【8】$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の不等式を解け。

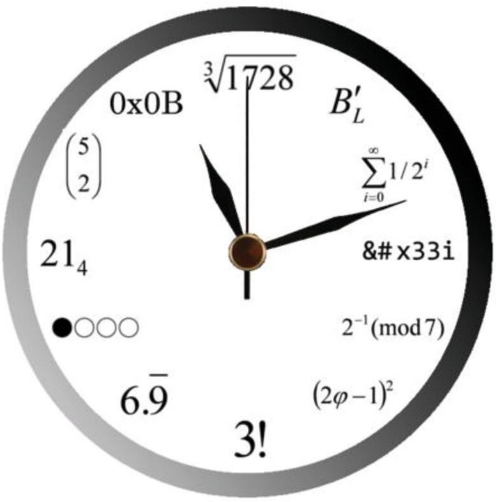
(1)　$2\sin^2\theta + 3\cos\theta < 0$

(2)　$\sin\theta\left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right) < 0$

【9】$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Komabakai Education Centre

KOMABA