2019年度　3学年理系　1学期
中間考査

数学Ⅲ

問題用紙

2019年5月21日（火）実施　　　　担当：青木・伊賀

試験開始の合図があるまで，この冊子を開かず，下記の注意事項をよく読むこと。

注意事項

1. 問題冊子は計算余白を含め8ページまである。
2. 解答用紙は別紙になっている。
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 解答用紙は，必ず指定された解答箇所に正しく答えよ。誤った番号の箇所に解答，もしくは解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となるので注意すること。
5. 受験者は全問を必答すること。
6. 試験開始の合図で解答用紙の所定欄に，**クラス名**・**出席番号**・**氏名（漢字）**を記入すること。
7. 試験終了の合図の前に上記6.の事項を再度確認し，試験終了の合図とともに試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。

※すべての問題において，e は自然対数の底とする。

解答のみ

1. （４２点）

（１）次の関数を微分せよ。

① $y=\dfrac{1}{2x^4}$　　② $y=\cos x$

③ $y=3^x+x^4$　　④ $y=\log 4x$

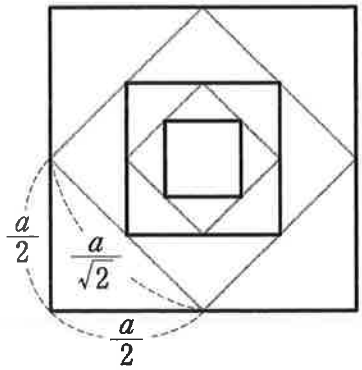
⑤ $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$　　⑥ $y=e^{2x}\sin 4x$

（２）$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

（３）曲線 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の点 $\left(2,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$における接線の方程式を求めよ。

（４）$f(x)=x^{100}+ax^5+b$ とする。$f(x)$が$(x-1)^2$で割り切れるような定数a，bの値を求めよ。

（５）1辺の長さがaの正方形がある。
その各辺の中点を順に結んで正方形をつくる。
さらにその正方形の各辺の中点を
順に結んで正方形をつくる。
このような操作を無限に続けるとき，
これらの正方形の周の長さの総和を求めよ。



(計算余白)

記述問題

2. （２４点）

（１）関数 $f(x)=|x|\sin x$ の $x=0$ における微分可能性を調べよ。

（２） $f(x)=\sin x$ において，$f'(x)$ を導関数の定義に従って求めよ。

（３）関数 $y=(\log x)^x$ を微分せよ。

（４）曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ に接し，原点を通る直線の方程式を求めよ。

（計算余白）

記述問題

3. （１０点）

xy 平面上の曲線 C を $x=\cos t$， $y=-\sin t+\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ で定義する。ただし， $0<t<\frac{\pi}{2}$ とする。曲線 C 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

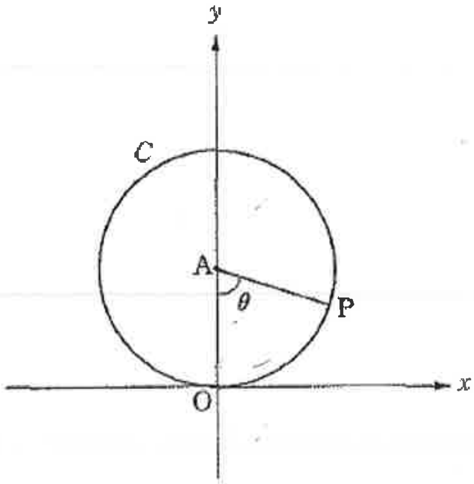
（計算余白）

記述問題

4.　（２４点）

Oを原点とするxy平面上に，点$\mathrm{A}(0,\ a)$を中心とする半径aの円Cがある。

C上の第1象限に点Pを，$\angle\mathrm{OAP}=\theta\ \ (0<\theta<\pi)$となるようにとる。ただし，$a>\dfrac{1}{2}$とする。



（1）Pの座標をa，θを用いて表せ。**（答のみで良い）**

（2）Pが放物線$y=x^2$上にあるとする。

（i）aをθを用いて表せ。また，$\lim_{a\to\infty}\theta$を求めよ。

次の（ii），（iii）の設問では，（i）で求めた極限値を$\lim_{a\to\infty}\theta=\theta_0$とする。

（ii）$\lim_{a\to\infty}(\theta_0-\theta)^2 a$　を求めよ。

（iii）Pからy軸に下ろした垂線の足をHとし，三角形OPHの面積をSとする。
$\lim_{a\to\infty}(\theta_0-\theta)^k S$が0以外の有限な値に収束するような$k$の値と，そのときの極限値を求めよ。

問題は以上です。

（計算余白）

(2) (i)