2019年度 第1学期 中間考査(3学年数学Ⅲ) 解答用紙（イ）

1. 42点
(5)のみ6点，他4点．

(1) ① $y' = -\dfrac{2}{x^5}$	(1) ② $y' = -\sin x$
(1) ③ $y' = 3^x \log 3 + 4x^3$	(1) ④ $y' = \dfrac{1}{x}$
(1) ⑤ $y' = \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$	(1) ⑥ $y' = 2e^{2x}(\sin 4x + 2\cos 4x)$
(2) e^3	
(3) $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + 2\sqrt{3}$ $\left(\dfrac{x}{8} + \dfrac{\sqrt{3}y}{6} = 1\right)$	
(4) $a = -20,\ b = 19$	
(5) $4(2+\sqrt{2})a$	

〈返却前〉
最高点 84
平均点 52.9

〈採点者〉
1、4 …青木
2、3 …伊賀

3年（　　）組（　　）番　　氏名（　　　　　　　　　　）

2019年度 第1学期 中間考査(3学年数学Ⅲ) 解答用紙（ロ）

2. 6点×4=24点

(1)
$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{|h|\sin h - 0}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{h\sin h}{h} = \lim_{h\to+0}\sin h = 0$$

また
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{|h|\sin h - 0}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{-h\sin h}{h} = \lim_{h\to-0}(-\sin h) = 0$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ より

$f(x)$は $x=0$ で微分可能

(2)
$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h} - \sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right)$$
$$= \lim_{h\to0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h} - \sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\cdot h\right)$$
$$= 1\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\sin x$$
$$= \cos x$$
$$\therefore f'(x) = \cos x$$

(3)
$$y = (\log x)^x$$
$$\log y = \log(\log x)^x$$
$$\log y = x\log(\log x)$$
両辺を x で微分すると
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\log(\log x) + x\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$y' = y\left\{\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right\}$$
$$= (\log x)^x\left\{\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right\}$$

(4)
$$y = \frac{\log x}{x} \quad \cdots①$$
$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$
曲線①上の点 $\left(t, \dfrac{\log t}{t}\right)$ における接線の方程式は
$$y - \frac{\log t}{t} = \frac{1-\log t}{t^2}(x-t)$$
$$y = \left(\frac{1-\log t}{t^2}\right)x + \frac{-1+2\log t}{2} \quad \cdots②$$
これが原点を通るので
$$0 = \frac{-1+2\log t}{2}$$
$$\log t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$
これを②へ代入
$$y = \frac{1-\log\sqrt{e}}{e}x + \frac{-1+2\log\sqrt{e}}{2}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{2}}{e}x + \frac{-1+1}{2}$$
$$= \frac{1}{2e}x \quad \therefore y = \frac{1}{2e}x$$

3. 10点

$x=\cos t$ より $\frac{dx}{dt}=-\sin t$

$y=-\sin t+\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ より

$$\frac{dy}{dt}=-\cos t+\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{2}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{2}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{2}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\sin 2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\cos t+\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}=\frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

よって $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\sin^2 t}{\cos t}}{-\sin t}=-\tan t$

$P\left(\cos t,\ -\sin t+\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$ とおくと

点Pにおける接線の方程式は

$y=-\tan t\,(x-\cos t)-\sin t+\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=(-\tan t)x+\log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$x=0$ として、$Q\left(0,\ \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$

$\overrightarrow{PQ}=(-\cos t,\ \sin t)$ より $|\overrightarrow{PQ}|=1$

∴ 線分PQの長さは一定である

4. 24点

4 (1) $P(a\sin\theta,\ a-a\cos\theta)$

(2)(i) Pが $y=x^2$ 上にあるので

$a-a\cos\theta=(a\sin\theta)^2$

$a\neq0$ より $1-\cos\theta=a\sin^2\theta$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq0$ なので

3 $a=\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$

ここで $a=\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{1}{1+\cos\theta}$ より

$1+\cos\theta=\frac{1}{a}$

∴ $\cos\theta=\frac{1}{a}-1$

$a\to\infty$ のとき $\cos\theta\to-1$ なので

3 $0<\theta<\pi$ より $\lim_{a\to\infty}\theta=\pi$

6 (ii) (i)より $a=\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $\theta_0=\pi$

また $a\to\infty$ のとき $\theta\to\pi$

$\lim_{a\to\infty}(\theta_0-\theta)^2a=\lim_{\theta\to\pi-0}(\pi-\theta)^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$

ここで $\pi-\theta=t$ とおくと、

$\theta\to\pi$ のとき $t\to0$ であるから

(与式) $=\lim_{t\to+0}t^2\cdot\frac{1-\cos(\pi-t)}{\sin^2(\pi-t)}$

$=\lim_{t\to+0}\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot(1+\cos t)$

$=1^2\cdot2$

$=2$

8 (iii) $P(a\sin\theta,\ a-a\cos\theta)$ より

$H(0,\ a-a\cos\theta)$

$S=\frac{1}{2}PH\cdot OH$

$=\frac{1}{2}\cdot a\sin\theta\,(a-a\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\,(1-\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3$

よって $(\theta_0-\theta)^kS=(\pi-\theta)^k\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^3$

$\pi-\theta=t$ とおくと

(与式) $=t^k\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\cos(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}\right\}^3$

$=\frac{1}{2}t^k\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)^3$

$=\frac{1}{2}t^{k-3}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^3(1+\cos t)^3$

$a\to\infty$ のとき $\theta\to\pi$ ∴ $t\to0$

このとき

$$\begin{cases}k>3\text{ ならば } t^{k-3}\to0\\ k=3\text{ ならば } t^{k-3}\to1\\ k<3\text{ ならば } t^{k-3}\text{ は発散する}\end{cases}$$

よって $a\to\infty$ のとき

$$\begin{cases}k>3\text{ ならば } (\theta_0-\theta)^kS\to\frac{1}{2}\cdot0\cdot1^3\cdot2^3=0\\ k=3\text{ ならば } (\theta_0-\theta)^kS\to\frac{1}{2}\cdot1\cdot1^3\cdot2^3=4\\ k<3\text{ ならば } (\theta_0-\theta)^kS\text{ は発散する}\end{cases}$$

∴ $\lim_{a\to\infty}(\theta_0-\theta)^kS$ が0以外の有限な値に収束するような k の値は $k=3$

そのときの極限値は

$\lim_{a\to\infty}(\theta_0-\theta)^3S=4$